Addendum uitwerkingen tentamen Vector Calculus 21 januari 2008

De op de FMF site staande uitwerking van het tentamen Vector Calculus 21 januari 2008 bevat enkele vrij stappen waar grote sprongen tussen zitten en een paar kleine foutjes. Dit document is een *aanvulling* op deze uitwerkingen en geeft enkele tussenstappen (aangegeven in grijs-blauw) en verbeteringen (aangegeven in rood).

Opgave 1

1.1. Correct

1.2. Aangezien $f_z(1,1,1) = 3 \neq 0$ geldt volgens de Impliciete Functiestelling dat er een C^1-functie g is, gedefinieerd op een omgeving van $(1,1)$, zo dat $g(1,1) = 1$. Etc…

1.3. De vergelijking van het raakvlak in p_0 is $z = h(x, y) = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{11}{3}$.

In de buurt van p_0 moet de functie g onder haar raakvlak h liggen. Dus voor (x, y) in de buurt van p moet gelden (en dit moeten we dus aantonen):

$$h(x, y) \geq g(x, y) \;\Rightarrow\; \varphi(x, y) = h(x, y) - g(x, y) \geq 0 \tag{1}$$

In punt p_0 met $(x, y, z) = (1,1,1)$ geldt: $\varphi(1,1) = 1 - 1 = 0$. Nu gaan we aantonen dat $\varphi(1,1)$ een locaal minimum heeft in punt p_0. Als dat namelijk het geval is, dan geldt voor een omgeving rondom punt p_0 dat $\varphi(x, y) \geq 0$.

Om te bepalen of de functie φ een minimum aanneemt definiëren we de functie $f(x, y, g(x, y)) = x^4 + y^4 + z^4 - z - 2 = 0$. Als we deze functie differentiëren respectievelijk naar x en naar y differentiëren krijgen we, gebruik makend van de kettingregel:

$$f_x(x, y, g(x, y)) + g_x(x, y) f_z(x, y, g(x, y)) = 0 \tag{2}$$

$$f_y(x, y, g(x, y)) + g_y(x, y) f_z(x, y, g(x, y)) = 0 \tag{3}$$

Voor $(x, y) = (1,1)$ geldt: $f_x(x, y, g(x, y)) = f_y(x, y, g(x, y)) = 4$ en $f_z(x, y, g(x, y)) = 3$.
De formules hierboven herschrijvend krijgen we dus:

$$g_x(1,1) = -\left.\frac{f_x(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))}\right|_{(1,1)} = -\frac{4}{3}$$

$$g_y(1,1) = -\left.\frac{f_y(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))}\right|_{(1,1)} = -\frac{4}{3}$$

Omdat $h_x(1,1) = h_y(1,1) = -\frac{4}{3}$ geldt $\varphi_x(1,1) = h_x(1,1) - g_x(1,1) = 0$ en $\varphi_y(1,1) = h_y(1,1) - g_y(1,1) = 0$ en dus heeft φ een kritiek punt in $(1,1)$ (zoals te verwachten was). Om de aard van dit kritieke punt na te gaan berekenen we de Hessiaan van φ in $(1,1)$.

De Hessiaan van $\varphi(x, y) = h(x, y) - g(x, y)$ wordt gegeven door:

$$H\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{xx} - g_{xx} & h_{xy} - g_{xy} \\ h_{xy} - g_{xy} & h_{yy} - g_{yy} \end{pmatrix}$$

We moeten dus de twee afgeleiden van *h* en *g* zien te vinden. De twee afgeleiden van *h* zijn eenvoudig, deze zijn allen nul. De tweede afgeleiden van *g* zijn wat meer werk. Om deze te vinden gaan de vergelijkingen (2) en (3) met behulp van de kettingregel nogmaals naar *x* en *y* differentiëren.

Om vergelijking (2) naar *x* af te leiden berekenen we eerst onderstaande afgeleiden:

$$\tfrac{d}{dx}\left[f_x(x,y,g(x,y))\right] = f_{xx} + f_{xz}g_x$$

$$\tfrac{d}{dx}\left[g_x \cdot f_z(x,y,g(x,y))\right] = g_{xx}\cdot f_z + g_x\cdot\left(f_{zx} + f_{zz}g_x\right)$$

Hieruit volgt dat de afgeleide van vergelijking (2) naar *x* gegeven wordt door:

$$\tfrac{d}{dx}\left[f_x(x,y,g(x,y)) + g_x\cdot f_z(x,y,g(x,y))\right] = f_{xx} + f_{xz}g_x + g_{xx}\cdot f_z + g_x\cdot\left(f_{zx}+f_{zz}g_x\right) = 0 \quad (4)$$

Er geldt $f_{xx} = 12x^2$, $f_{xz} = 0$, $f_z = 4g^3 - 1 = f_z = 4g^3 - 1$ en $f_{zz} = 12z^2 = 12g^2$ (waarbij deze laatste stappen kunnen omdat voor het oppervlak geldt, zoals ook bij deel 2 van de opgave is gebruikt, dat $z = g(x,y)$). Voor vergelijking (4) krijgen we dan:

$$12x^2 + g_{xx}\cdot\left(4g^3-1\right) + g_x^2\cdot 12g^2 = 0 \;\Rightarrow\; g_{xx} = \frac{-12x^2 - 12g^2g_x^2}{4g^3-1}$$

en dus $g_{xx}(1,1) = -\frac{100}{9}$.

Op analoge wijze krijgen we als we vergelijking (2) naar *y* differentiëren (of vergelijking (3) naar *x*):

$$\tfrac{d}{dx}\left[f_x(x,y,g(x,y)) + g_x\cdot f_z(x,y,g(x,y))\right] = f_{xy} + f_{xz}g_y + g_{xy}\cdot f_z + g_x\cdot\left(f_{zy}+f_{zz}g_y\right) \quad (5)$$

Er geldt $f_{xy} = f_{zy} = f_{xz} = 0$, $f_z = 4g^3 - 1 = f_z = 4g^3 - 1$ en $f_{zz} = 12z^2 = 12g^2$. Voor vergelijking (5) krijgen we dan:

$$g_{xy}\cdot\left(4g^3-1\right) + g_xg_y\cdot 12g^2 = 0 \;\Rightarrow\; g_{xy} = \frac{-12g^2g_xg_y}{4g^3-1}$$

en dus $g_{xy}(1,1) = -\frac{64}{9}$

Tenslotte krijgen we eveneens op analoge wijze als we vergelijking (3) naar *y* differentiëren:

$$\tfrac{d}{dy}\left[f_y(x,y,g(x,y)) + g_y\cdot f_z(x,y,g(x,y))\right] = f_{yy} + f_{yz}g_y + g_{yy}\cdot f_z + g_y\cdot\left(f_{zy}+f_{zz}g_y\right) = 0 \quad (6)$$

Er geldt $f_{yy} = 12y^2$, $f_{yz} = 0$, $f_z = 4g^3 - 1 = f_z = 4g^3 - 1$ en $f_{zz} = 12z^2 = 12g^2$. Voor vergelijking (6) krijgen we dan:

$$12y^2 + g_{yy}\cdot\left(4g^3-1\right) + g_y^2\cdot 12g^2 = 0 \;\Rightarrow\; g_{yy} = \frac{-12y^2 - 12g^2g_y^2}{4g^3-1}$$

en dus $g_{yy}(1,1) = -\frac{100}{9}$.

De Hessiaan van $\varphi(1,1)$ wordt dus:

$$H\varphi(1,1)=\begin{pmatrix}\varphi_{xx}(1,1) & \varphi_{xy}(1,1)\\ \varphi_{xy}(1,1) & \varphi_{yy}(1,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_{xx}-g_{xx} & h_{xy}-g_{xy}\\ h_{xy}-g_{xy} & h_{yy}-g_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-(-\frac{100}{9}) & 0-(-\frac{64}{9})\\ 0-(-\frac{64}{9}) & 0-(-\frac{100}{9})\end{pmatrix}$$

Gebruik makend van de Second Derivative test (pg. 250) krijgen we dus:

$$d_{11}=\varphi_{xx}(1,1)=\tfrac{100}{9}>0$$

$$d_{22}=\det\begin{pmatrix}\varphi_{xx}(1,1) & \varphi_{xy}(1,1)\\ \varphi_{xy}(1,1) & \varphi_{yy}(1,1)\end{pmatrix}=\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2=\left(-\tfrac{100}{9}\right)^2-\left(\tfrac{64}{9}\right)^2>0$$

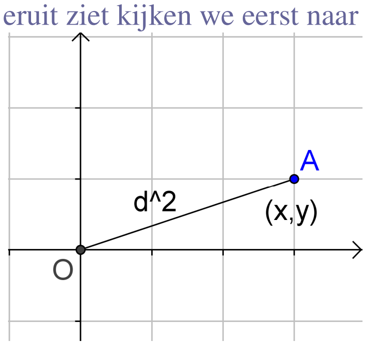
Dus de functie $\varphi(x,y)$ heeft een locaal minimum in het punt $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Hieruit volgt, zoals aan het begin van de uitwerking van deze opgave is besproken, dat $\varphi(x,y)\geq 0$ rondom punt p_0.

Opgave 2
De uitwerking van deze opgave is correct.

Opgave 3 – methode 2
Als hint wordt gegeven te kijken naar de functie die elk punt van het oppervlak afbeeldt op het kwadraat van zijn afstand tot *p*.

Om te bepalen hoe zo'n functie eruit ziet kijken we eerst naar een eenvoudig 2D geval.

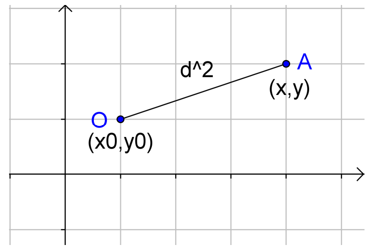


Het kwadraat van de afstand van punt O in de oorsprong naar punt *A* met coördinaten (x,y) wordt met Pythagoras gegeven door:

$$d^2=x^2+y^2$$

Als punt O niet in de oorsprong ligt maar in punt (x_0,y_0) dan wordt het kwadraat van de afstand tussen de punten O en *A* gegeven door (zie ook onderstaande afbeelding):

$$d^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$$



We werken echter in 3D, dus er komt in bovenstaande formule nog een term $(z-z_0)^2$ bij.
Er is geven dat z in x en y kan worden uitgedrukt door de in de opgave staande formule.
De kwadratische afstand φ tussen de grafiek en willekeurig punt (x_0, y_0, z_0) wordt daarom gegeven door:

$$\varphi = f(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \left(\frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - z_0\right)^2 .$$

Voor punt p geldt dat $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, z_0)$, waarmee bovenstaande vergelijking reduceert tot:

$$\varphi = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + \left(\frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - z_0\right)^2$$

Hieruit leiden we af:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= 2\frac{x}{a}\left(a + \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - z_0\right) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 2\frac{y}{a}\left(b + \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - z_0\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Hieruit zie je dat er in ieder geval een kritiek punt is als $(x, y) = 0$.
Om andere kritieke punten te zoeken stellen we

$$a + \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - z_0 = 0 \tag{8}$$

$$b + \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - z_0 = 0 \tag{9}$$

Deze twee functies kunnen we dus aan elkaar gelijk stellen, waarmee we krijgen:

$$a + \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - z_0 = b + \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - z_0 \iff a = b .$$

Maar $a = b$ is niet mogelijk, omdat per definitie (zie opgave) $a < b$.
Dus (8) en (9) tegelijkertijd aan elkaar nul stellen kan niet.

Dus als (8) = 0, dan geldt dat (9) $\neq 0$, waardoor uit vergelijking (7) volgt dat voor een extremum moet gelden dat $y = 0$. Als (8) = 0 en $y = 0$ dan krijgen we:

$$a + \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - z_0 = a + \frac{x^2}{2a} - z_0 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2a(z_0 - a)}$$

Dus er is ook een extremum op $(x,y)=(\pm\sqrt{2a(z_0-a)},0)$.
Dit is echter alleen een extremum als $z_0 \geq a$, voor andere gevallen is de wortel namelijk imaginair.

Analoog: als (9) = 0, dan geldt dat (8) $\neq 0$, waardoor uit vergelijking (7) volgt dat voor een extremum moet gelden dat $x=0$. Als (9) = 0 en $x=0$ dan krijgen we:

$$b+\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}-z_0=b+\frac{y^2}{2b}-z_0=0 \;\Rightarrow\; y=\pm\sqrt{2b(z_0-b)}$$

Dus er is ook een extremum op $(x,y)=(0,\pm\sqrt{2b(z_0-b)})$
Dit is echter alleen een extremum als $z_0 \geq b$, voor andere gevallen is de wortel namelijk imaginair.

Om het type extremum te berekenen stellen we de Hessiaan op.

$$H\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_{xx} & \varphi_{xy}\\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\frac{3x^2}{a^2}+\frac{y^2}{ab}-\frac{2z_0}{a} & \frac{2xy}{ab}\\ \frac{2xy}{ab} & 2+\frac{3y^2}{b^2}+\frac{x^2}{ab}-\frac{2z_0}{b}\end{pmatrix}$$

1. In het punt (0,0) wordt de Hessiaan

$$H\varphi=\begin{pmatrix}2\left(1-\frac{z_0}{a}\right) & 0\\ 0 & 2\left(1-\frac{z_0}{b}\right)\end{pmatrix}$$

Gebruik makend van de Second Derivative Test (pg. 250) krijgen we:

$$d_{11}=2\left(1-\tfrac{z_0}{a}\right)=\begin{cases}>0 & \text{als } z_0<a\\ <0 & \text{als } z_0>a\end{cases}$$

$$d_{22}=\det H\varphi=4\left(1-\tfrac{z_0}{a}\right)\left(1-\tfrac{z_0}{b}\right)=\begin{cases}>0 & \text{als } z_0<a,b \text{ en } z_0>a,b\\ <0 & \text{als } b>z_0>a\end{cases}$$

Dus als $z_0<a,b$ dan is punt *p* een minimum, in de andere gevallen niet.

2. In het punt $(\pm\sqrt{2a(z_0-a)},0)$ met $z_0 \geq a$ wordt de Hessiaan

$$H\varphi=\begin{pmatrix}2\left(1-\frac{z_0}{a}\right)+\frac{6(z_0-a)}{a} & 0\\ 0 & 2+\frac{2a(z_0-a)}{ab}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{a}(z_0-a) & 0\\ 0 & \frac{2b-2a}{b}\end{pmatrix}$$

Gebruik makend van de Second Derivative Test (pg. 250) krijgen we:
$d_{11}=\frac{4}{a}(z_0-a)>0$ omdat voor deze oplossing gold: $z_0 \geq a$.

$d_{22}=\det H\varphi=\frac{4}{a}(z_0-a)\frac{2b-2a}{b}=\frac{8}{ab}(b-a)(z_0-a)>0$ omdat voor deze oplossing gold $z_0 \geq a$ en per definitie $b>a$.

Dus $z_0 \geq a$ geeft deze oplossing een minimum.

3. Analoog aan de berekening voor het tweede extremum, met als uitkomst dat $z_0 \geq b$ we een minimum hebben.

Conclusie:

- Als $z_0 < a, b$ dan geeft $\varphi(0,0) = z_0^2$ de minimale kwadratische afstand, dus de minimale afstand *d* wordt gegeven door $d = z_0$.
- Als $z_0 > a$ dan geeft $\varphi(\pm\sqrt{2a(z_0 - a)}, 0) = 2a(z_0 - a) + a^2 = a(2z_0 - a)$ de minimale kwadratische afstand, dus de minimale afstand *d* wordt gegeven door:
  $d = \sqrt{a(2z_0 - a)}$
- Als $z_0 > b$ dan is er ook een lokaal minimum met $\varphi(0, \pm\sqrt{2b(z_0 - b)}) = 2b(z_0 - b) + b^2 = b(2z_0 - b)$. Dit is echter nergens een *minimale* afstand van punt *p* tot de grafiek omdat $b > a$ dus ook $b(2z_0 - b) > a(2z_0 - a)$